

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

 找找看
 谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记4——向量3 (叉积)

什么是叉积

向量的叉积也叫外积、向量积、叉乘或矢量积。两个向量的叉积是这样表示的：

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

在二维空间内，向量 $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ， $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

二维时叉积是个数

其几何意义就是以两个向量为边的平行四边形的面积，这在上篇文章中给出了详细说明。

此外，叉积也适用于两个在三维空间内的向量。在三维空间内，向量 $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ， $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ， $\mathbf{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \langle \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \rangle$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是三个维度中每个维度的单位向量，有点像三阶行列式，但并不是常理上的行列式，因为行列式不会出现向量，这里仅仅是为了便于表达和记忆。

从上面的描述中可以看出，叉积得到的是一个向量，而不是一个数字，也因此， $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ 并不等同，实际上，

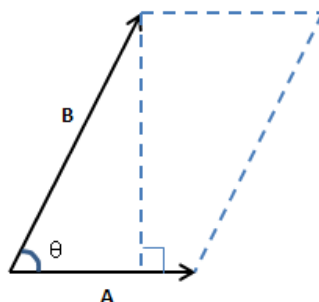
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

叉积的几何意义

向量的两个要素是模长和方向，让我们从这两个角度考虑叉积的几何意义。

在模长上，叉积的几何意义是以两个向量为边的平行四边形的面积：

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \text{Area}$$



随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

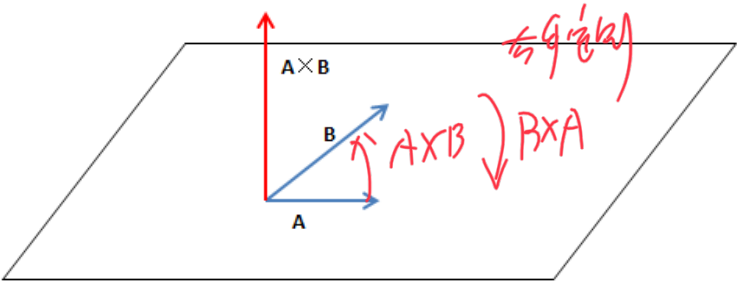
- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

两个相同向量的叉积是0，

$A \times A = 0$

如果用几何意义解释，二者构成一条线段，线段的面积是0。

在方向上，叉积垂直于平行四边形所在的平面：



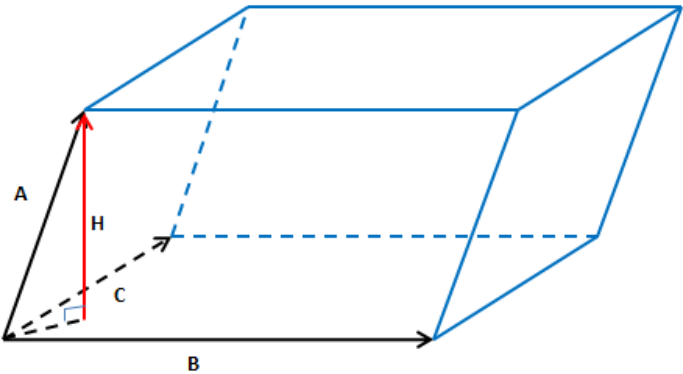
由于叉积存在负值，所以垂直的方向可能向上或向下，具体方向根据右手法则判断。

右手法则很有意思，首先要保持拇指朝上，然后其他四指指向叉积的第一个向量，向内弯曲四指指向另一个向量。如果两个向量的方向能符合这个手势，此时拇指的方向就是叉积的方向；如果必须向外弯曲四指，拇指的反方向是叉积的方向。总之，最终能够以一个舒服的方向竖起拇指就对了。

叉积的作用

计算平行六面体的体积

所谓平行六面体，就是六面体的每个面都是平行四边形，如下图所示：



向量H是垂直于底面的向量，|H|是六面体的高，可看作向量A在H方向上的分量，分量可以用点积表示，这在上一篇中叙述过。如果令u是H方向的单位向量：

Handwritten red notes:
B x C 求出 H 方向
求 H 方向单位向量 u
|Au| 为高

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\pm V = |B \times C|H$$

$$= |B \times C|(A \cdot u)$$

$$= |B \times C| \left(A \cdot \frac{B \times C}{|B \times C|} \right)$$

$$= A \cdot (B \times C)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

判断点是否在同一平面

空间内的三点可以确定一个平面， P_1, P_2, P_3 是空间中的三个点，另有一点P，如何判断P是否在平面内？



P是否在 P_1, P_2, P_3 组成的平面内？

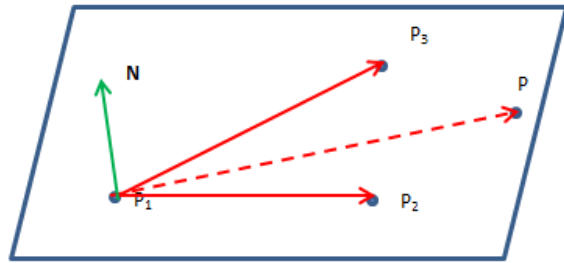
可以借助向量通过上一节中平行六面体体积的知识判断，如下图所示：



这样形成了三个向量， $|P_1P_3 \times P_1P_2|$ 是这两个向量围成的平行四边形的面积， $P_1P \cdot |P_1P_3 \times P_1P_2|$ 表示平行六面体的体积，如果体积是0，那么P就在平面内。

计算法向量

也可以用另一种方法求解上面的问题，这需要法向量的帮助。一个与平面垂直的向量称为该平面的法向量，一个平面有无数条法向量，法向量与一个常数的乘积还是法向量。



$\mathbf{N}$ 是平面的法向量, 如果 $\mathbf{N} \perp \mathbf{P_1P}$, 则 P 在平面内。根据点积的知识, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{P_1P} = 0$, 则 $\mathbf{N} \perp \mathbf{P_1P}$ 。如何计算 $\mathbf{N}$ 呢? 实际上, $\mathbf{N}$ 就是 $\mathbf{P_1P_3}$ 与 $\mathbf{P_1P_2}$ 的叉积。

如果 P 在平面内, 则体积 = $\mathbf{P_1P} \cdot (\mathbf{P_1P_3} \times \mathbf{P_1P_2}) = 0$; 由于 $\mathbf{N} \perp \mathbf{P_1P}$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{P_1P} = 0$, 结合二者:

$$\mathbf{P_1P} \cdot (\mathbf{P_1P_3} \times \mathbf{P_1P_2}) = \mathbf{P_1P} \cdot \mathbf{N} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{P_1P_3} \times \mathbf{P_1P_2}$$

示例

示例1

平行六面体是三条边是三个向量 $\langle 2, 2, 0 \rangle$, $\langle 1, 0, 1 \rangle$, $\langle 0, 1, 1 \rangle$, 求该六面体的体积。

很明显是相交于 $\langle 0, 0, 0 \rangle$ 的三个向量, 设三个向量分别是 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

体积是4

示例2

计算三个点围成的三角形的面积, $P_1(-1, 0, 1)$, $P_2(0, 2, 2)$, $P_3(0, -1, 2)$

使用叉积很容易计算, 需要注意的是, 点积和叉乘仅对向量有意义, 对点来说则毫无用处, 所以首先需要将点转换为向量。

$$\mathbf{P_1P_2} = \mathbf{P_2} - \mathbf{P_1} = (0, 2, 2) - (-1, 0, 1) = \langle 1, 2, 1 \rangle$$

$$\mathbf{P_1P_3} = \mathbf{P_3} - \mathbf{P_1} = (0, -1, 2) - (-1, 0, 1) = \langle 1, -1, 1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P_1P_2} \times \mathbf{P_1P_3} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \langle \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \rangle \\ &= \langle 3, 0, -3 \rangle \end{aligned}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\mathbf{P_1P_2} \times \mathbf{P_1P_3}| = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: 线性代数

标签: 叉积, 叉乘, 内积, 向量积

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

2

0

 推荐

 反对

« 上一篇: [线性代数笔记3——向量2（点积）](#)
» 下一篇: [线性代数笔记5——平面方程与矩阵](#)

posted on 2018-01-05 22:50 我是8位的 阅读(8734) 评论(3) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS_文档在线预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等，特定格式的合作，支持Windows、信创环境下一键部署

打开

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月6日-3月18日



最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes